Analiza funkcjonalna
Lista 1 (przestrzenie liniowe)

Zad 1. Sprawdzić, czy podany zbiór funkcji rzeczywistych F wraz z działaniami określonymi punktowo stanowi przestrzeń liniową

a) $F = \{x : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x(t)$ funkcja niemalejąca$\}$, b) $F = \{x : [0, 7] \to \mathbb{R} : x(1) = 0\}$

c) $F = \{x : [-4, 3] \to \mathbb{R} : x(0) = 1\}$, d) $F = \{x : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x(t + 1) = x(t),\ t \in \mathbb{R}\}$

e) $F = \{x : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x(t)$ funkcja okresowa$\}$, f) $F = \{x : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x(t)$ funkcja stała$\}$.

Zad 2. Niech $\mathbb{K}$ oznacza ciało liczbowe $\mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$. Pokazać, że podane zbiory funkcji stanowią przestrzenie liniowe nad $\mathbb{K}$:

$B(\Omega) = \{x : \Omega \to \mathbb{K} : \sup_{t \in X} |x(t)| < \infty\}$, gdzie Ω dowolny zbiór,

$C(\Omega) = \{x : \Omega \to \mathbb{K} : x(t)$ funkcja ciągła$\}$, gdzie Ω przestrzeń topologiczna,

$BC(\Omega) = \{x : \Omega \to \mathbb{K} : x(t)$ funkcja ciągła i ograniczona$\}$, Ω prz. topologiczna,

$H_\alpha(\Omega) = \{x : \Omega \to \mathbb{K} : \exists_{L>0}\ \forall_{t,s\in\Omega}\ |x(t) - x(s)| \le L|t - s|^\alpha\}$, gdzie $\Omega \subset \mathbb{K}$, $\alpha > 0$.

Zad 3. Niech $k \in \mathbb{N}$. Uzasadnić, że

$C^{(k)}([a, b]) = \{x : [a, b] \to \mathbb{R} :$ pochodne $x', x'', ..., x^{(k)}$ istnieją i $x^{(k)}$ jest ciągła na $[a, b]\}$

jest przestrzenią wektorową nad $\mathbb{R}$.

Zad 4. Niech Ω będzie otwartym (niepustym) podzbiorem płaszczyzny zespolonej $\mathbb{C}$. Uzasadnić, że

$$H(\Omega) = \{x : \Omega \to \mathbb{C} : x \text{ jest funkcją holomorficzną na } \Omega\}$$

jest przestrzenią wektorową nad $\mathbb{C}$.

Zad 5. Wykazać, że podane zbiory ciagów o wyrazach w ciele $\mathbb{K}$, wraz z działaniami określonynmi po współrzednych, stanowią przestrzenie wektorowe nad $\mathbb{K}$:

$\ell_\infty = \{x = (x(1), x(2), x(3), ...) : \sup_{k\in\mathbb{N}} |x(k)|\}$,

$\ell_p = \{x = (x(1), x(2), x(3), ...) : \sum_{k=1}^{\infty} |x(k)|^p < \infty\}$, $p \in (0, \infty)$,

$c = \{x = (x(1), x(2), x(3), ...) : \lim_{k\to\infty} x(k)$ istnieje$\}$,

$c_0 = \{x = (x(1), x(2), x(3), ...) : \lim_{k\to\infty} x(k) = 0\}$.

Zad 6. Udowodnić, że dla dowolnych $0 < p < q < \infty$ zachodzą inkluzje

$$l_p \subset l_q \subset c_0 \subset c \subset l_\infty$$

oraz żadnej z nich nie można zastąpić równością.

Zad 7. Niech μ będzie miarą dodatnią na σ-ciele Σ podzbiorów zbioru Ω oraz $p \in (0, \infty)$. Udowodnić, że przestrzeniami wektorowymi nad $\mathbb{K}$ są

$$\mathcal{L}_p(\Omega, \Sigma, \mu) = \{x : \Omega \to \mathbb{K} : x \text{ funkcja mierzalna i } \int_\Omega |x|^p\, d\mu < +\infty\},$$

oraz

$$\mathcal{L}_\infty(\Omega, \Sigma, \mu) = \{x : \Omega \to \mathbb{K} : \sup\operatorname{ess}_{t\in\Omega} |x(t)| < +\infty\},$$

gdzie

$$\sup\operatorname{ess}_{t\in\Omega} |x(t)| = \inf\{M > 0 : |x(t)| \le M \text{ dla prawie wszystkich } t \in \Omega\}.$$